Introduction à la décision sous incertitude

Hélène Fargier,
d'après beaucoup d'autres ...

Journées du GDR MACS, Albi, 30 Mars 2012

fargier@irit.fr

Introduction

Qu'est-ce qu'une décision ?

Choix entre plusieurs objets ou actions possibles en fonction de la connaissance dont on dispose sur le contexte du choix et d'objectifs à atteindre, exprimés par des préférences

Plusieurs types de décision :

- Décision microscopique : beaucoup de décisions élémentaires à prendre (ex : décision de précédence entre tâches dans un plan) combinatoire à gérer, critères simplifiés, aspect temporel
- Décision macroscopique : un choix de haut niveau parmi quelques alternatives (choix d'un site pour une centrale) pas de combinatoire mais évaluation complexe, statique

Dimensions d'un problème de décision

- Objectifs simples ou multiples
- Temps
- Incertitude sur l'état du monde

Décision multicritère en environnement connu
difficulté : formulation des objectifs, arbitrage

Décision mono-critère en environnement partiellement inconnu
difficulté : intégrer l'incertain dans le critère

Décision séquentielle : planification de séquences d'actions
difficulté : combinatoire

Formalisation d'un problème de décision statique sous incertitude "1 agent contre la nature"

- $S = \{1, \ldots n\}$: ensemble d'états possibles du monde
- D : ensemble de décisions (actions) : $d, f \in D$
- X : ensemble de conséquences possibles des actions : $x \in X$
- Une décision est une application $d : S \mapsto X$
  $d(s) = x$ conséquence de la décision d dans l'état s

Problème : Étant donné une **connaissance** partielle sur l'état du monde et une relation de **préférence** sur X, construire une relation de préférence sur D, afin de classer / comparer / optimiser les décisions

Exemple (Savage) : Faire une omelette

Il y a une omelette à cinq oeufs dans la tasse.
Faut-il casser un 6ème oeuf dans la tasse ?

États (S) Décisions (D)	oeuf sain	oeuf pourri
casser l'oeuf dans la tasse	omelette à 6 oeufs (1)	pas d'omelette (6) et 5 oeufs gachés
casser l'oeuf à part	omelette à 6 oeufs et un plat à laver (2)	omelette à 5 oeufs et un plat à laver (4)
jeter l'oeuf	omelette à 5 oeufs et un oeuf gâché (5)	omelette à 5 oeufs (3)

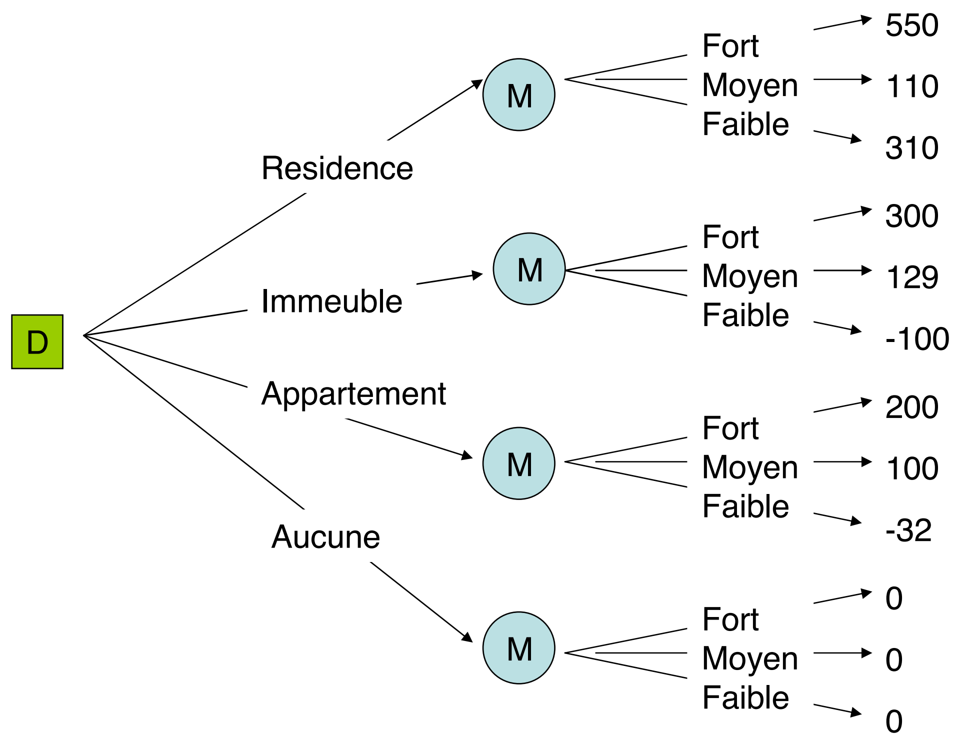
Un autre exemple

Investissement immobilier : faut-il investir dans une résidence, un immeuble, des appartements, ou ne faire aucun investissement ??

Cela va dépendre de l'état du marché immobilier : Fort, Moyen ,Faible

États (S) / Décisions (D)	Fort	Moyen	Faible
Residence	550	110	-310
Immeuble	300	129	-100
Appartements	200	100	-32
Aucun	0	0	0

Arbre de Décision



Deux joueurs : le décideur, puis le "monde"

Représentation des préférences

L'ensemble des consequences X est supposé ordonné par un relation de préférence (complète, transitive)

On utilise souvent une fonction d'utilité $u : X \mapsto \mathbb{R}$:

$$u(x) > u(x') \text{ ssi } x \text{ est préfèré a } x'$$

u(x) = valeur de la consequence x pour le décideur; subjective !

- Utilité "qualitative" (ordinale) : representation d'une relation, u ne vaut que par l'ordre qu'elle représente
- Utilité "quantitative" (cardinale) : notion d'intensité de preference
  $u(x') - u(x) \geq u(y') - u(y)$: ma satisfaction augmente plus si j'obtiens x' à la place de x que si j'obtiens y' à la place de y
  $(x, y) \Rightarrow (x', y)$ plutot que $(x, y) \Rightarrow (x, y')$

Connaissances sur l'état du monde

Décision sous ....

- Ignorance totale $s \in S \mapsto$ Information incomplète : $s \in E \subseteq S$
- Information incomplète graduelle : $s \in E1 \subseteq E2 \subseteq \cdots \subseteq S$
- Incertitude probabilisée ("risque") : information riche sur le monde (statistiques, historiques), situation de décision répétée
- Probabilités imprécises

1. Décision sous ignorance totale

On ne sait rien sur l'état du monde ; tous sont equi possibles

Décision $d \mapsto$ vecteur de conséquences $(d(s_1), \ldots, d(s_n)) \in X^n$

Hypothèse minimale : X est ordonné par $\geq$ (opérateurs $\max$, $\min$)

Décision sous ignorance totale : maximax et maximin

- Maximin (critère de "Wald") – le critère du décideur pessimiste : on choisit la décision qui à la plus grande utilité minimale (la "moins pire")

  Maximiser $U_*(d) = \min_{s \in S} d(s)$

- Maximax – le critère du décideur optimiste : on choisit la décision qui à la plus grande utilité maximale

  Maximiser $U^*(d) = \max_{s \in S} d(s)$

Classement : selon U_* (resp. U^*) décroissant, bien sur

Décision sous ignorance totale : maximax et maximin (2)

	Fort	Moyen	Faible	U_*	U^*
Residence	550	110	-310	-310	550
Immeuble	300	129	-100	-100	300
Appartements	200	100	-32	-32	200
Aucun	0	0	0	0	0

Maximin - critère pessimiste (U_*) : on n'achète rien

Maximax - critère optimiste (U^*) : on achète une residence

Décision sous ignorance : principe de Laplace

Principe de l'opportunité égale de tous les états de la nature (un peu plus que de l'ignorance ....)

Maximiser la conséquence moyenne $L(d) = (1/|S|) \,.\, \Sigma_s d(s)$

Hypothèse implicite X est cardinal : $X \subseteq \mathbb{R}$ (somme, produit, etc)

Pb : Dans la réalité decideurs ne sont pas indifférents un paris ou une décision certain de même moyenne, e.g. $(100, -100)$ et $(0, 0)$ (généralement, aversion au risque)

Principe de Laplace $\mapsto$ utilité moyenne (Bernouilli)

Principe de l'opportunité égale + prise en compte d'une utilité des conséquences ($\neq$ valeur monétaire de la conséquence, en général).

Fonction d'utilité $u : X \mapsto \mathbb{R}$

- concave — forte prime quand on d'éloigne des mauvaises conséquences – pessimisme, prudence, aversion pour le risque ("risk adverse") : $abs(u(-100)) >> abs(u(100))$
- convexe : optimisme , attirance pour le gain
- linéaire : neutralité

Principe de Laplace $\mapsto$ utilité moyenne (Bernouilli)

Principe de l'opportunité égale + prise en compte d'une utilité des conséquences

Fonction d'utilité $u : X \mapsto \mathbb{R}$

Maximiser l'*utilité* moyenne des conséquences

Maximiser $L(d) = (1/|S|)\Sigma_s u(d(s))$

Bernoulli : utilité logarithmique

maximiser $B(d) = (1/|S|)\Sigma_s ln(d(s))$

Critère de l'utilité moyenne (fin)

Maximiser $L(d) = (1/|S|) \, . \, \Sigma_s \, u(d(s))$

- Sensible à de petites variations des gains
- Sensible à l'ajout d'un état
- Adapté à des décisions répétées
- Finalement, met aussi sur un pied d'égalité des décisions très différentes (ex : $(u = 100, u = -100)$ et $(u = 0, u = 0)$).

Regret minimal (Savage)

... On risque de le regretter ...

- Utilité de la décision idéale pour l'état s : $\max_{d'} u(d'(s))$
- Regret (post mortem) à avoir choisit d dans l'état s :
  $r(d, s) = \max_{d'} u(d'(s)) - u(d(s))$

- Regret au pire cas pour d = $R(d) = \max_s r(d, s)$

Minimiser $R(d) = \max_s(\max_{d'} u(d'(s)) - u(d(s)))$

Classer par $R(d)$ croissant

Décision sous ignorance totale : regret minimal (2)

	Fort	Moyen	Faible	Fort	Moyen	Faible	Regret max
Residence	550	110	-310	0	129 - 110	0 - (-310)	310
Immeuble	300	129	-100	550 - 300	129 - 129	0 - (-100)	250
Appartements	200	100	-32	550 - 200	129 - 100	0 - (-32)	350
Aucun	0	0	0	550 - 0	129 - 0	0 - 0	550
u max	550	129	0				

Minimiser le regret max : acheter un immeuble

Décision sous ignorance : Critère de Hurwicz

Moduler entre pessimisme et optimisme

Maximiser $H(d) = \alpha \,.\, min_s u(d(s)) + (1 - \alpha) \,.\, max_s u(d(s))$

Attitude vis-à-vis du risque modélisée par α :

- $\alpha = 1$ pessimisme
- $\alpha = 0$ optimisme

Peut être plus proche de l'utilité moyenne que des utilités qualitatives (maximin, maximax) : effet de compensation

Décision sous ignorance

- Maximax : sur optimiste, noyade $(\max(10,0) = max(10,10))$
- Wald (maximin) : sur pessimiste, noyade
- Regret : difficile à calculer, noyade (regret *max*)
- Hurwicz : arbitrage entre pessimisme et optimisme, noyade quand même
- Laplace, Bernoulli : ok pour des décisions répétées car compensatoire ; sinon, utiliser des utilités à grandes marches
- Alternative : comparaison leximin des utilités

Principe de Pareto strict : si pour tout s, $u(d(s)) \geq u(b(s))$ et qu'il existe s^* tel que $u(d(s)) > u(b(s))$,

alors d doit être préférée à b.

Décision sous ignorance totale : leximin

Rattraper le faible pouvoir de décision du maximin en raffinant l'ordre qu'il propose.

L'idée est donc d'ôter les paires d'utilités minimum égales avant de prendre le min, jusqu'à ce qu'ils soient différents.

Ici : $(4, 2, 3, 2)?(2, 4, 2, 2) \rightarrow (4, 3, 2)?(4, 2, 2) \rightarrow (4, 3)?(4, 2)$

$(4, 3) >_{min} (4, 2)$ donc $(4, 2, 3, 2) >_{leximin} (2, 4, 2, 2)$

Le leximin (2)

Ordre leximin = tris non décroissant des vecteurs,
puis ordre lexicographique (inverse)

Exemples :

$(1,2,3,4) =_{\text{leximin}} (4,2,1,3)$, car $(1,2,3,4) \Longleftrightarrow (1,2,3,4)$

$(4,2,3,2) \succ_{\text{leximin}} (9,2,2,2)$, car $(2,2,3,4)$ précède $(2,2,2,9)$ dans l'ordre lexicographique inverse

L'ordre leximin *raffine* l'ordre induit par le maximin :

$d \succ_{maximin} d' \Rightarrow d \succ_{\text{leximin}} d'$

Le Leximin peut être approché "aussi près que l'on veut" par une moyenne d'utilités concaves à grandes marches.

Décision sous ignorance totale : propriétés

- Tous ces critères sont des critères d'utilité agrégée :
  vecteur d'utilités $\mapsto$ utilité numérique ($\in \mathbb{R}, \mathbb{N}$)
  Définissent des préférences transitives sur les décisions

- Maximax, Regret, Wald : ne satisfont pas le *principe de Pareto strict*

  Principe de Pareto : si pour tout s, $u(d(s)) \geq u(b(s))$ et qu'il existe s^* tel que $u(d(s)) > u(b(s))$, alors d doit être préférée à b.

- Maximax, Regret, Wald :
  ne satisfont pas le *principe de la chose sure*

Décision sous ignorance totale : propriétés (2)

Principe de la chose sûre : si f et g ont la même conséquence pour un état s, la préférence entre les deux décisions ne dépend pas d cette conséquence.

Ex : $(f1, .., f_{n-1}, h) \succeq (g1, .., g_{n-1}, h) \iff (f1, .., f_{n-1}, h') \succeq (g1, ..s, g_{n-1}, h')$

Laplace, Leximin satisfont le principe de la chose sûre

Maximax, Regret, Wald ne satisfont pas le principe de la chose sûre

Eg. : $(-4, -100)$ et $(-5, -100)$ sont indifférents pour Maximin, Regret (ideal $(0, 0)$)

mais $(-4, 0)$ est préférée à $(-5, 0)$

Décision sous ignorance totale : propriétés (3)

- Tous ces critères sont des critères d'utilité agrégée :
vecteur d'utilités $\mapsto$ utilité numérique ($\in \mathbb{R}, \mathbb{N}$)
Définissent des préférences transitives sur les décisions

- Maximax, Regret, Wald : ne satisfont pas le *principe de Pareto strict* ni le principe de la chose sûre

- Regret : difficile à calculer,

- Laplace : ok Pareto, compensatoire (décision répétée)

- Leximin : ok Pareto, prudent, non compensatoire bien que de type moyenne

2. Décision sous information incomplète graduelle, utilités qualitatives

Décision sous information incomplète

Connaissance : $s \in E \subset S$

- Principe de l'opportunité égale, dans E : Maximiser l'utilité moyenne

$$L(d) = (1/|E|)\Sigma_{s\in E} u(d(s))$$

- Maximin : Maximiser l'utilité min dans E

$$U_*(d) = \min_{s\in E} u(d(s))$$

- Maximax sur E, Min regret sur E, etc.

Décision sous information incomplète graduelle

Connaissance : $s \in E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots E_n \subseteq Y$

Ensembles d'intervalles d'erreur emboîtés, de E_1 (le plus optimiste) à E_n (le plus pessimiste)[a]

Exemple : "environ 2h" durée (mal connue) d'une tâche à executer: pas moins de 1h45 ni plus de 2h15,

$E1 = [1h55, 2h05]$, $E_2 = [1h50, 2h10]$, $E_3 = [1h45, 2h15]$

[a] On dit aussi que $E = (E_1 \ldots E_n)$ est un ensemble "flou" ou "graduel"

Théorie des possibilités

Connaissance : $y \in E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots E_n \subseteq Y$

Représentée par une distribution de possibilité $\pi : Y \mapsto [0, 1]$

$\pi(v)$ estime dans quelle mesure il est possible que v soit la val. de y :
$\pi(v) > \pi(v')$ ssi v est plus plausible que v'

- $\pi(v) = 1$ si $v \in E_1$: tout à fait possible
- $\pi(v) = 0$ si v extérieur à E_n : impossible
- $\pi(v) > \pi(v')$: v est une valeur plus plausible que v' :
  $v \in E_i, v' \in E_j \setminus E_i, i < j$

$E_1 = \{v, \pi(v) = 1\}$ est le noyau de π (valeurs les plus possibles)

$E_n = \{v, \pi(v) > 0\}$ est le support de π(valeurs non impossibles)

Théorie des possibilités

Connaissance : $y \in E = (E_1 \dots E_n)$

$\mapsto$ représentée par π une distribution sur les valeurs de y

Estimer la confiance en la réalisation événement "$y \in A$"

- $\Pi(A) = sup_{v \in A}\ \pi(v)$: s'appuie sur le cas le plus favorable à A
  - égal à 1 si A contient une valeur totalement possible
  - égal à 0 si A ne contient que des valeurs totalement impossible
- $N(A) = 1 - \Pi(\overline{A}) = 1 - sup_{v \notin A} \pi(v)$: s'appuie sur le cas le plus favorable de l'événement contraire
  - égal à 1 : A contient toutes les valeurs possibles (support)
  - égal à 0 : A ne contient pas une valeur totalement possible

Théorie des possibilités – exemple

y la durée incertaine d'une tâche (probablement 25mn +- 1mn, certainement pas moins de 21 ni plus de 29).

$\Pi(y \geq 25) = \Pi(y \leq 25) = 1$ $\qquad$ $\Pi(y \leq 23) = \Pi(y \geq 27) = 2/3$

$\Pi(y \in [20, 30]) = 1$	$N(y \in [20, 30]) = 1$	:	certain
$\Pi(y \in [23, 27]) = 1$	$N(y \in [23, 27]) = 1/3$	:	relativement certain
$\Pi(y \in [24, 25]) = 1$	$N(y \in [24, 25]) = 0$	:	ignorance totale sur l'ev.
$\Pi(y \geq 27) = 2/3$	$N(y \geq 27) = 0$	:	peu plausible, mais pas totalement impossible
$\Pi(y \geq 31) = 0$	$N(y \geq 31) = 0$	:	totalement impossible

Décision ordinale sous information incomplète graduelle

$u \mapsto L = [0,1]$ une fonction d'utilité
$\pi : S \mapsto L = [0,1]$ une distribution de poss. sur l'ensemble des états.
π supposée normalisée ($\exists s,\ t.q.\ \pi(s) = 1$)

- $\pi(s_1) > \pi(s_2)$: s_1 plus possible de s_2,
- $u(x) > u(y)$: x strictement préféré à y,
- $u(x) = \pi(s)$: la plausibilité de s est du même ordre que l'utilité de x
  - $u(x) = 0$: consequence inacceptable, $\pi(s) = 0$: état impossible;
  - $u(x) = 1$: consequence idéale, $\pi(s) = 1$: état tout à fait possible
  - *Même échelle pour u et π*

L'échelle L est *ordinale* : classe les $\pi(s), u(x)$, rien de plus
(typiquement, on pose $L = [0,1]$, mais toute transformation ordinalement
equivalent est acceptable)

Décision ordinale : utilité possibiliste optimiste

$\pi : S \mapsto L$ une distribution de possibilité,
$u : X \mapsto L$ une fonction d'utilité

, même échelle L

Approche optimiste :
maximiser la possibilité d'obtenir de bonnes conséquences

maximiser $U_{OPT}(d) = \max_{s \in S} \min(\pi(s), u(d(s)))$

U_{OPT} utilise les conséquences *hautes et plausibles* pour évaluer les décisions

Par exemple, avec $L = 0 \leq 0.1 \leq 0.6 \leq 0.8 \leq 1$,

	s_1	s_2	s_3
$u(f(s))$	0.6	0.8	1
$\pi(s)$	1	0.1	0

$U_{OPT,\pi,\mu}(f) = \max\{\min\{1, 0.6\}, \min\{0.1, 0.8\}, \min\{1, 0\}\} = 0.6$

Utilité possibiliste optimiste

$U_{OPT}(d) = \max_{s \in S} \min(\pi(s), u(d(s)))$

Ignorance totale : $\pi(s) = 1 \; \forall s$,

$\mapsto U_{OPT}(d) = \max_{s \in S} \min(1, u(d(s))) = U^*(d)$

Généralise le critère maximax

Souvent trop optimiste : $U_{OPT} = 1$ dès qu'une conséquence idéale est totalement possible (la possibilité d'avoir une très mauvaise conséquence peut rester forte !)

Utilité possibiliste pessimiste

Ranger les actes en fonction de leur utilité pessimiste

maximiser $U_{PES}(d) = \min_{s \in S} \max(1 - \pi(s), u(d(s)))$

On élimine les situations peu plausibles ($1 - \pi(s)$ haut) ; on se focalise sur les pires des situations relativement plausibles

U_{PES} utilise les conséquences *mauvaises et plausibles* pour évaluer les décisions

Par exemple, avec $L = [0, 1]$,

	s_1	s_2	s_3
$u(d(s))$	0.9	0.2	0.6
$\pi(s)$	1	0.3	0.7

$$U_{PES}(f) = \min\{\max\{1 - 1, 0.9\}, \max\{1 - 0.3, 0.2\}, \max\{1 - 0.7, 0.6\}\}$$
$$= \min(0.9, 0.7, 0.6) = 0.6$$

Utilité possibiliste pessimiste

$U_{PES}(d) = \min_{s \in S} \max(1 - \pi(s), u(d(s)))$

Ignorance totale : $\pi(s) = 1 \; \forall s$,

$\mapsto \; U_{PES}(d) = \min_{s \in S} \max(1 - 1, u(d(s))) = U_*(d)$

U_{PES} généralise le critère de Wald.

Utilité possibiliste : utilité de paris

xAy dénote la décision de conséquence x pour les états de A, y sinon.
xAy est un "Pari" sur A ($x > y$)

$$\begin{aligned}
U_{PES}(1A0) &= \min(\min_{s \in A} \max(1-\pi(s),1), \min_{s \in \overline{A}} \max(1-\pi(s),0)) \\
&= \min_{s \in \overline{A}} 1-\pi(s) = N(A) \\
U_{PES}(xAy) &= \text{mediane}(u(x), N(A), u(y)) \\
U_{OPT}(xAy) &= \text{mediane}(u(x), \Pi(A), u(y)) \\
U_{OPT}(1A0) &= \Pi(A)
\end{aligned}$$

A suffisamment certain de A : le DM "croit" en la cons. x : $U_{PES}(xAy) = u(x)$

A trop peu certain de A : le DM "croit" en la cons. y : $U_{PES}(xAy) = u(y)$

Sinon l'utilité de la décision reflète sa certitude en A : $U_{PES}(xAy) = N(A)$

Utilités ordinales, généralisation

$U_{PES}(f) = \min_{s\in S} \max(1-\pi(s), u(d(s))) = \max_{\lambda\in L} min(\lambda, N(F_\lambda))$

$U_{OPT}(d) = \max_{s\in S} \min(\pi(s), u(d(s))) = \max_{\lambda\in L} min(\lambda, \Pi(F_\lambda))$

où $F_\lambda = \{s, u(f(s)) \geq \lambda\}$: ensemble des états donnant bonne conséquence ("bonne" = utilité au moins λ)

$U_{PES}(f)$: nécessité d'avoir une bonne conséquence en choisissant f

$U_{OPT}(f)$: possibilité d'avoir une bonne conséquence en choisissant f

A partir d'une probabilité P on pourrait construire:
$U_P(d) = Max_{\lambda\in L} min(\lambda, P(F_\lambda))$

Mesures de confiance, capacités

N, Π, comme les mesures de probabilité P sont des mesures de confiance d'événements

Ce sont fonctions monotones (ou "capacités") associant une degré confiance entre 0 et 1 à tout événement

Formellement μ est une capacité ssi

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(S) = 1$,
- $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

Exemples : mesure de Probabilité, de Possibilité, de Nécessité,

Capacités : probabilités inférieures et supérieures

Information : "un tiers des boules est rouge, le reste bleu ou vert".

Question : probabilité de "bleu ou rouge" ? $\mapsto$ au moins $1/3$, au plus 1

Travailler sur l'ensemble
$\mathfrak{F} = \{P, P(Rouge) = 1/3, P(Bleu) + P(Vert) = 2/3\}$
de toutes les mesures de probabilité compatibles avec l'information

Calculer des mesures inférieure et supérieure de la probabilité
$P_*(Bleu) = 0$, $P_*(Vert) = 0$, $P_*(Rouge) = 1/3$,
$P_*(Bleu\ ou\ Rouge) = 1/3$,

Capacités : probabilités inférieures et supérieures

$\mathfrak{F}$ un ensemble de mesures de probabilité.

$P_*(A) = inf_{p \in \mathfrak{F}} P(A)$ *est la mesure de probabilité inférieure associée à* $\mathfrak{F}$

$P^*(A) = sup_{p \in \mathfrak{F}} P(A)$ *est la mesure de probabilité supérieure associée à* $\mathfrak{F}$

P_* et P^* sont des capacités,

Utilités ordinales (intégrales de Sugeno)

Connaissances : $\mu : S \mapsto L = [0,1]$;
Préférences : $u : X \mapsto L = [0,1]$
$\mapsto$ une échelle *commune* L

$\mu(A) > \mu(B)$: A plus plausible que B,
$u(x) > u(y)$: x strictement préféré à y,
$u(x) = \mu(a)$: la plausibilité de a est du même ordre que l'utilité de x

Maximiser $Sug_{\mu,u}(f) = Max_{\lambda \in L} min(\lambda, \mu(F_\lambda))$

$F_\lambda = \{s, u(f(s)) \geq \lambda\}$: ensemble des états donnant un bonne conséquence ("bonne" = au moins λ)

Évalue f par la meilleure de ses conséquences suffisamment plausible, au sens de la mesure de confiance μ

Utilités ordinales (intégrales de Sugeno)

$Sug_{\mu,u}(f) = Max_{\lambda \in L} min(\lambda, \mu(F_\lambda))$

- N'utilise que la dimension ordinale de L (rangement) :
  - seulement des operations de min et de max.
  - $Sug_{\mu,u}(xAy) =$ médiane $(x, y, \mu(A))$
  - Adapté à l'utilisation d'information pauvre, qualitative
- Attitude face au risque
  - μ est une probabilité inférieure (e.g. N): pessimisme
  - μ est une probabilité supérieure (e.g. Π): optimisme
- Génère un nombre limité de classes d'équivalence
  (pas plus que de "barreaux" dans L)

Comment parametrer une règle de décision ordinale (intégrale de Sugeno)

Hypothèse : on a établi au préalable que le décideur utilise (ou veut utiliser) une utilité ordinale : tester les axiomes de la théorie.

$Sug_{\mu,u}(f) = Max_{\lambda \in L} min(\lambda, \mu(F_\lambda))$ donc

- $Sug_{\mu,u}(xAy) = mediane(u(x), \mu(A), u(y))$ (pour $x > y$)
- $Sug_{\mu,u}(1A0) = \mu(A)$,
- $Sug_{\mu,u}(x) = u(x)$

Si hypothèse que toute décision possède un équivalent certain $\mapsto L = X$.

Reste à éliciter μ en comparant les "paris" $1A0$ aux actes constants.

Simplifications si on connaît des propriétés de μ (si c'est un Π, un N)

3. Décision dans le risque (probabilisé) : utilité espérée

État de connaissance "riche" = representable par une une distribution de probabilité $p : S \mapsto [0, 1]$ *numérique*

2 interprétations :

- statistique : décrit la variabilité d'observations précises; observation répétée du phénomène
- subjective : exprime les croyances d'un agent (prévue pour l'information incomplète, pas forcément répétable)

Probabilités qualitatives (subjectives)

Hypothèse : les connaissances sont représentables par une relation de probabilité (ou "probabilité qualitative"), i.e.

une relation $\succeq$ sur les événements $A \subseteq S$, tel que :

- $\succeq$ complet, reflexif, transitif (*preordre*)
- $A \subseteq B \implies B \succeq A$ (donc $S \succeq A \succeq \emptyset \forall A$)
- $\forall A, B, C$ disjoints , $A \succeq B \iff A \cup C \succeq B \cup C$ (condition de preadditivité)

Dans la plupart des cas, il existe une distribution de probabilité p codant $\geq$, i.e. telle que : $P(A) \geq P(B) \iff A \geq B$

Critère de l'utilité espérée

$Maximiser\ UE(d) = \Sigma_s p(s)\ .\ u(d(s))$

Sous l'hypothèse $u(x) = x$: maximiser l'espérance de gain;

p	Fort 0.3	Moyen 0.4	Faible 0.3	UE_p
Residence	550	110	-310	116
Immeuble	300	129	-100	111,6
Appartements	200	100	-32	90,4
Aucun	0	0	0	0

Paradoxe de Saint Petersbourg

Maximiser l'espérance de gain $EG(d) = \Sigma_s p(s) \,.\, d(s)$?

Soit le jeu suivant, pour un droit de x euros : on lance en l'air une pièce de monnaie. Si face apparaît, la banque paie 2 euros au joueur, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce. Si face apparaît, la banque paie 4 euros, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce. Si face apparaît, la banque paie 8 euros au joueur, et ainsi de suite. Donc, si face apparaît pour la première fois au n-ième lancer, la banque paie 2^n euros au joueur.

Gain espéré $\Sigma_{n=1,+\infty}(1/2)^n \times 2^n - x = +\infty$,
donc x pourrait être aussi grand que l'on veut

Peu de gens accepteraient de parier leur fortune sur ce jeu !!!

Paradoxe de Saint Petersbourg

Les decideurs n'utilisent pas un critère de maximisation du gain espéré $\mapsto$ mise en evidence de l'aversion pour le risque

Maximiser l'espérance de l' *utilité du gain* $UE(d) = \Sigma_s p(s) \,.\, u(d(s))$

- Bernoulli, pour le paradoxe de Saint Petersbourg : $u(x)$ est logarithmique
- utilité concave : pessimisme, prudence, aversion pour le risque. Explique les comportements d'assurance.
- utilité convexe : optimisme , attirance pour le gain
- linéaire : neutralité

Théorie de la décision $\mapsto$ utilité espérée

L'utilité espérée à été justifiée axiomatiquement (e.g. Savage 1954)

"Tout décideur «rationnel» utilise le critère de l'utilité espérée"
i.e. il existe une fonction d'utilité sur X et une distribution de probabilité sur S telle que le décideur préfère f à g ssi $EU(f) \geq EU(g)$)

Rationnel ??? principalement :

- La préférence du décideur $\succeq$ sur X^S est complète et transitive (pas d'incomparable, transitivité y compris de l'indifférence)
- Principe de la chose sure :
  $\forall f, h, h, h' \in X^S, \forall A \subseteq S : fAh \succeq gAh \iff fAh' \succeq gAh'$

Plus des axiomes plus techniques e.g. X continu, connexe

Retour sur les probabilités subjectives

Hypothèse : le décideur satisfait les axiomes de Savage
donc utilise une utilité espérée pour comparer ses décisions.

Eliciter les probabilités en posant des choix entre deux décisions :

- Paris de coût x : gagner y si A advient, 0 sinon
  $UE((y-x)A(-x) = (u(y)-u(x))\,.\,P(A)+(-x)\,.\,(1-P(A)) = u(y)\,.\,P(A)-u(x)$
- Ne pas parier : utilité espérée $UE(0) = 0$.

Le décideur parie à partir du moment où $u(y)\,.\,P(A) - u(x) > 0$

$P(A) = u(x)/u(y)$, où x est le prix maximal que le décideur est prêt à parier sur A
pour un gain de y

Probabilité d'un événement A = somme que l'on est prêt à parier sur A

Critère de l'utilité espérée : propriétés utiles

- Representation numérique,
- Principe de la chose sûre, Pareto,
- Adapté à une prise de décision répétée : les bons résultats compensent les mauvais
- Caractérisations axiomatiques : permet d'éliciter les données
  - Probabilités (objectives) connues à priori
    $\mapsto$ utilisation d'équivalents certains pour éliciter u .
  - Cadre subjectif de Savage $\mapsto$ élicitation de u, P possible aussi .
  - Note : des caractérisations axiomatiques et des methodes l'élicitation comparables existent aussi pour les utilités qualitatives

Critère de l'utilité espérée : propriétés

- Suppose connues les probabilités des états, sinon, les éliciter : pas si facile ("forcer" le décideur à choisir)
- Mal adapté à une information pauvre ($\mapsto$ théorie de la décision qualitative; voir aussi UE qualitatives).
- Mal adapté à des préférences non compensatoires, à des décisions non répétables
- Prise en compte de la variabilité des résultats, aversion au risque ... limitée à la fonction d'utilité

- Ne rend pas compte de certains comportements, tout aussi rationnels et fondés sur des préférences compensatoires.

4. Utilité (non espérées) (non additives)

Paraxode de Ellsberg

Urne = 90 boules, 30 rouges et 60 noires ou jaunes.

Tirage : une boule.

- Option A : recevoir 100 euros si la boule est rouge, rien sinon.
- Option B : recevoir 100 euros si la boule est noire, rien sinon.
- Option C : recevoir 100 euros si la boule est rouge ou jaune, rien sinon.
- Option D : recevoir 100 euros si la boule noire ou jaune, rien sinon.

Préférez vous parier A ou parier B ?
Préférez vous parier C ou parier D ?

Paraxode de Ellsberg

Urne = 90 boules, 30 rouges et 60 noires ou jaunes.

Tirage : une boule.

- Option A : recevoir 100 euros si la boule est rouge, rien sinon.
- Option B : recevoir 100 euros si la boule est noire, rien sinon.
- Option C : recevoir 100 euros si la boule est rouge ou jaune, rien sinon.
- Option D : recevoir 100 euros si la boule noire ou jaune, rien sinon.

Les decideurs sont souvent prudents :

- préfèrent A à B (on a $1/3$ chances de gagner, pour B, la proba est entre 0 et $2/3$)
- préfèrent D à C (on a $2/3$ chances de gagner, pour C, la proba est entre $1/3$ et 1)

Paraxode de Ellsberg

Urne = 90 boules, 30 rouges et 60 noires ou jaunes.

- Option A : recevoir 100 euros si la boule est rouge, rien sinon.
- Option B : recevoir 100 euros si la boule est noire, rien sinon.
- Option C : recevoir 100 euros si la boule est rouge ou jaune, rien sinon.
- Option D : recevoir 100 euros si la boule noire ou jaune, rien sinon.

Quelle que soit u, il n'existe pas de distribution de probabilité telle que $EU(A) > EU(B)$ et $EU(C) < EU(D)$

Les decideurs "rationnels" n'utilisent pas toujours le critère de l'utilité espérée.

Paraxode de Ellsberg :
violation du principe de la chose sure

Principe de la chose sure :

$\forall f, h, h, h' \in X^S, \forall A \subseteq S : fAh \succeq gAh \iff fAh' \succeq gAh'$

Ici :

$$\begin{array}{lcll} u(100)\{R\}u(0)\{J\}u(0)\{N\} & > & u(0)\{R\}u(0)\{J\}u(100)\{N\} & \text{mais} \\ u(100)\{R\}u(100)\{J\}u(0)\{N\} & < & u(0)\{R\}100\{J\}u(100)\{N\} & \end{array}$$

Paraxode de Ellsberg : le fin mot de l'affaire

Les probabilités de R, N et J ne sont pas connues avec certitude.

Famille de mesures de probabilité $\mathfrak{F} = \{P, P(R) = 1/3, P(N \text{ ou } J) = 2/3\}$.

En particulier : $$\begin{array}{lll} P_1(R) = 1/3 & P_1(J) = 2/3 & P_1(N) = 0 \\ P_2(R) = 1/3 & P_2(J) = 0 & P_2(N) = 2/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} A & : EU(100\{R\}0\{J\}0\{N\}) = 1/3\,.\,100 & : & \text{dans tous les cas.} \\ D & : EU(0\{R\}100\{J\}100\{N\}) = 2/3\,.\,100 & : & \text{dans tous les cas.} \\ B & : EU(0\{R\}0\{J\}100\{N\}) \in [0\,.\,100, 2/3\,.\,100] & : & \text{on évalue ce paris à } 0, \\ & & & \textit{sur } P1\text{, par prudence} \\ C & : EU(100\{R\}100\{J\}0\{N\}) \in [1/3\,.\,100, 1\,.\,100] & : & \text{on évalue ce paris à } 1/3\,.\,100, \\ & & & \textit{sur } P2\text{, par prudence} \end{array}$$

Extension de l'UE aux capacités : Intégrale de Choquet

Comment calculer une utilité agreggée à partir d'une fonction d'utilité u et μ une capacité sur les événements ? Retournons d'abord sur le cas probabiliste

Ex: 3 états, hyp. (non restrictive) : $u(f(s_3)) \geq u(f(s_2)) \geq u(f(s_1)))$

$$\begin{array}{lcccc} UE(f) = & u(f(s_3)).p(s_3) & + & u(f(s_2)).p(s_2) & + \quad u(f(s_1)).p(s_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} UE(f) = & u(f(s_1)) & . & (p(s_3)+p(s_2)+p(s_1)) \\ + & (u(f(s_2)) - u(f(s_1))) & . & (p(s_3)+p(s_2)) \\ + & (u(f(s_3)) - u(f(s_2))) & . & (p(s_3)) \end{array}$$

Notations pour le cas general : avec $L = \lambda_m > \cdots > \lambda_1$ et $F_{\lambda_j} = \{s, u(f(s)) \geq \lambda_j\}$

On peut montrer que, pour tout f,

$UE(f) = \lambda_1 + \sum_{j=m \ldots 2} (\lambda_j - \lambda_{j-1}).P(F_{\lambda_j})$

Extension de l'UE aux capacités : Intégrale de Choquet

Pour une probabilité:

Maximiser $\quad UE(f) = \quad \lambda_1 + \sum_{j=m...2}(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \,.\, P(F_{\lambda_j})$

Avec $L = \lambda_m > \cdots > \lambda_1$ et $F_{\lambda_j} = \{s, u(f(s)) \geq \lambda_j\}$

Pour une capacité quelconque μ

Maximiser $\quad Ch(f)_\mu = \quad \lambda_1 + \sum_{j=m...2}(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \,.\, \mu(F_{\lambda_j})$

Sugeno à partir de μ :

Maximiser $\quad Sug_\mu(f) = \quad Max_{j=m...1} min(\lambda_j, \mu(F_{\lambda_j}))$

Intégrale de Choquet sur l'exemple de Ellsberg

$Ch(f) = \sum_{j=m \ldots 2} (\lambda_j - \lambda_{j-1}).\mu(F_{\lambda_j}) + \lambda_1$

où $\mu = P_*$ sur $\mathfrak{F} = \{P, P(R) = 1/3, P(N \text{ ou } J) = 2/3\}$.

$$
\begin{array}{lclcl}
Ch(100\{R\}0\{J\}0\{N\}) & = & (100 - 0)\,.\,1/3 + 0\,.\,1 & = & 1/3\,.\,100 \\
Ch(0\{R\}0\{J\}100\{N\}) & = & (100 - 0)\,.\,0 + 0\,.\,1 & = & 0 \\
Ch(100\{R\}100\{J\}0\{N\}) & = & (100 - 0)\,.\,1/3 + 0\,.\,1 & = & 1/3\,.\,100 \\
Ch(0\{R\}100\{J\}100\{N\}) & = & (100 - 0)\,.\,2/3 + 0\,.\,1 & = & 2/3\,.\,100
\end{array}
$$

Cas particuliers de l'intégrale de Choquet

$Ch(f) = \sum_{j=m...2}(\lambda_j - \lambda_{j-1}).\mu(F_{\lambda_j}) + \lambda_1$

- μ est une mesure de probabilité : $Ch(f)$ est son utilité espérée.
- μ est la borne inférieur d'une famille de probabilités convexe : utilité pessimiste à a priori multiples
- μ peut également être une mesure de possibilité, de nécessité
- μ est une deformation convexe d'une mesure de probabilité (on sous évalue les probabilités des événements favorables) : $Ch(f)$ est une "utilité dependant du rang" pessimiste.

Propriétés des intégrales de Choquet

- Utilisables avec n'importe quelle mesure de confiance μ, y compris des probabilités "pauvres" (familles de probabilité)
- Effets de compensation des faibles utilités par les fortes utilités : approche cardinale
- Ne respecte pas le principe de la chose sure
- Respecte la dominance stochastique

Décision sous information probabiliste incomplète

La représentation numérique non bayesienne de l'incertain
(induite par une famille de fonctions de probabilité)
autorise une généralisation de tous les critères.

- Utilité espérée inférieure (ou supérieure) (Schmeidler) :
  INTÉGRALES DE CHOQUET
- Généralisation du Maximin et Maximax :
  INTÉGRALES DE SUGENO
- Généralisation du critère de Hurwicz : pondérer les utilités espérées inférieure et supérieure avec un coefficient d'optimisme (Jaffray).
- Généralisation du critère de Bernoulli : on se ramène à l'utilité espérée en transformant les degrés d'incertitude en probabilités (Smets)

Quelle règle de décision utiliser ???

CELA DEPEND AVANT TOUT

DE L'INFORMATION DISPONIBLE

(TYPE D'INCERTITUDE, TYPE D'UTILITÉ)

DE L'ATTITUDE VIS A VIS DU RISQUE

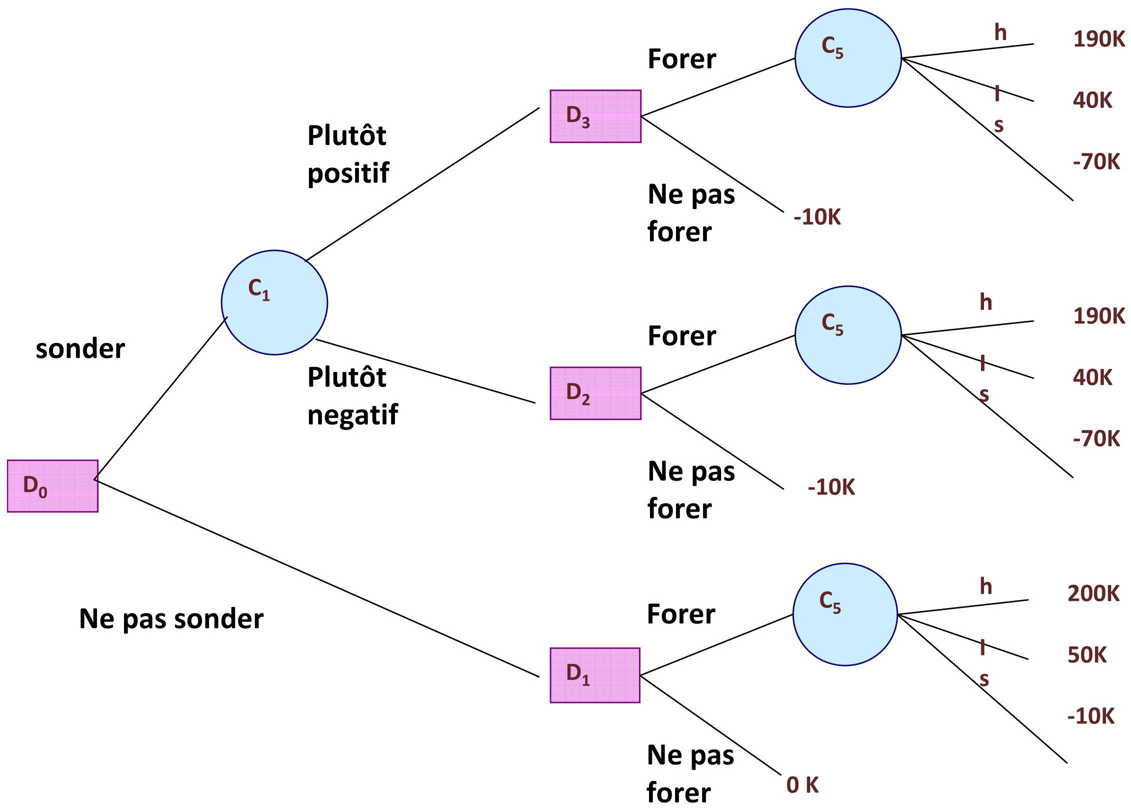
Critère	incertitude	utilité	Attitude
Maximin	ignorance totale	ordinale	pessimiste
Leximin	ignorance totale	ordinale	pessimiste
Maximax	ignorance totale	ordinale	optimiste
Leximax	ignorance totale	ordinale	optimiste
Hurwicz	ignorance totale	quantitative	toutes (selon α)
Min Regret	ignorance totale	quantitative	pessimiste
Laplace	ignorance =+	quantitative	neutre
Utilité Moyenne	ignorance+	quantitative	toutes (selon fct utilité)
Utilité Pessimiste	connaissance incomplète graduelle	ordinale	pessimiste
Utilité Optimiste	connaissance incomplète graduelle	ordinale	optmiste
Sugeno	ordinale	ordinale	toutes (selon fct de plausibilité)
Utilité Espérée	Riche probabiliste objective ou subjective	quantitative	toutes (selon fct utilité)
Choquet	probabiliste au sens large	quantitative	toutes (selon fct d'utilité et mesure de plausibilité)
Rank dependent Utilité	Riche probabiliste objective ou subjective	quantitative	toutes (selon fct d'utilité et transformation de la probabilité)
Jaffray	probabiliste au sens large	quantitative	toutes (selon α)

D’autres arguments à prendre en compte

- Utilité compensatoire / decision repétée ? (EU, Choquet)
- Propriétés prescriptives : transitivité, complétude, principe de la chose sure, Pareto
- Aspects calculatoires :
  - Approches ordinales (Sugeno et lexi-Sugeno) moins cher que Choquet et mieux adapté à une information "pauvre"
  - optimisation sur les domaines combinatoires
    - mesure decomposable (UE, U^*, U_*) ou non
    - principe de la chose sure
  - décision séquentielle

Decision séquentielle

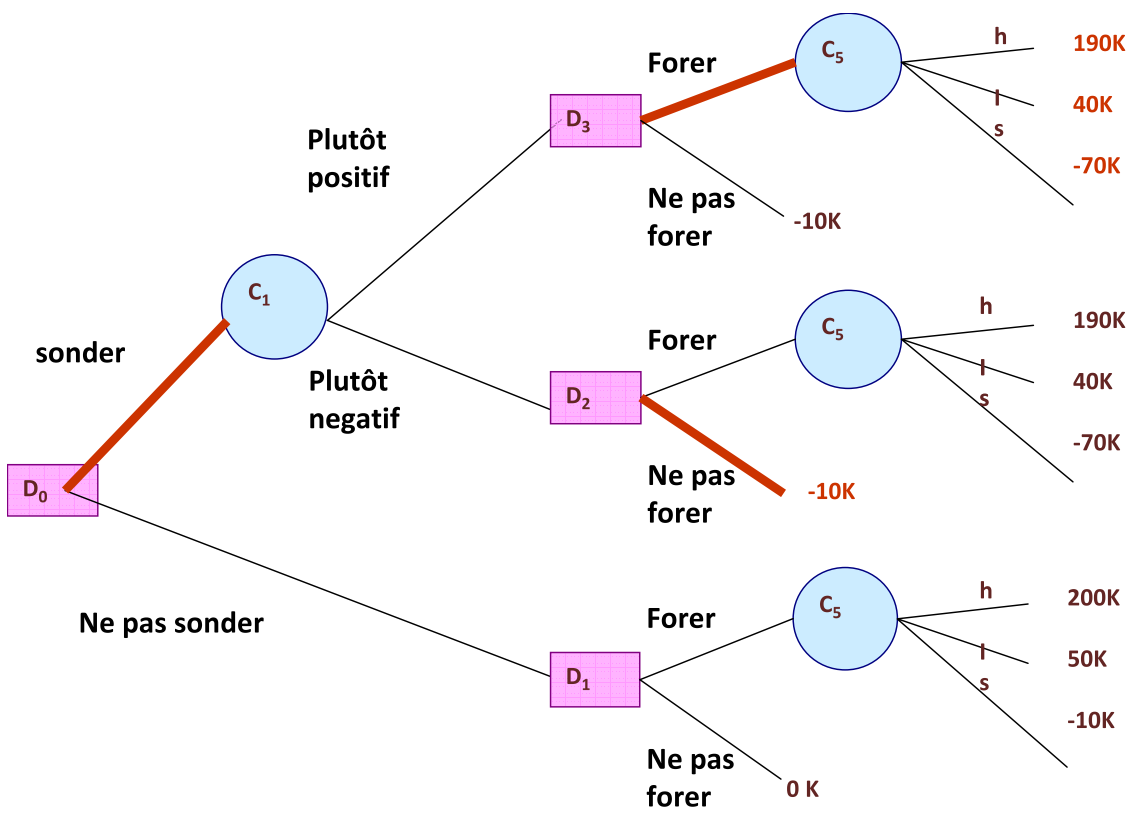
Arbre de Décision



Sondage : -10 K
Forage : - 70 K

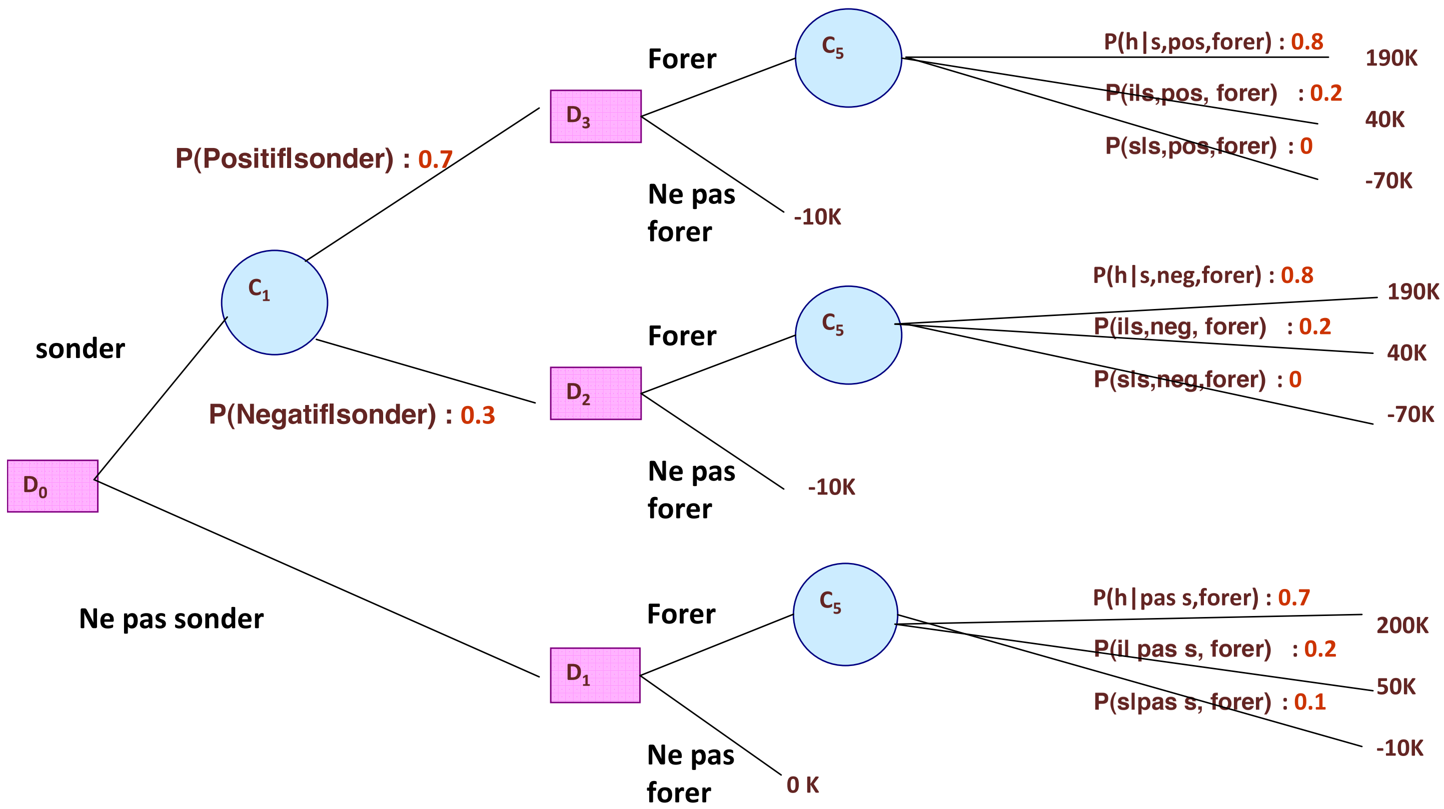
Humide: 270 K
Imbibé: 120 K
Sec: 0 K

Strategie

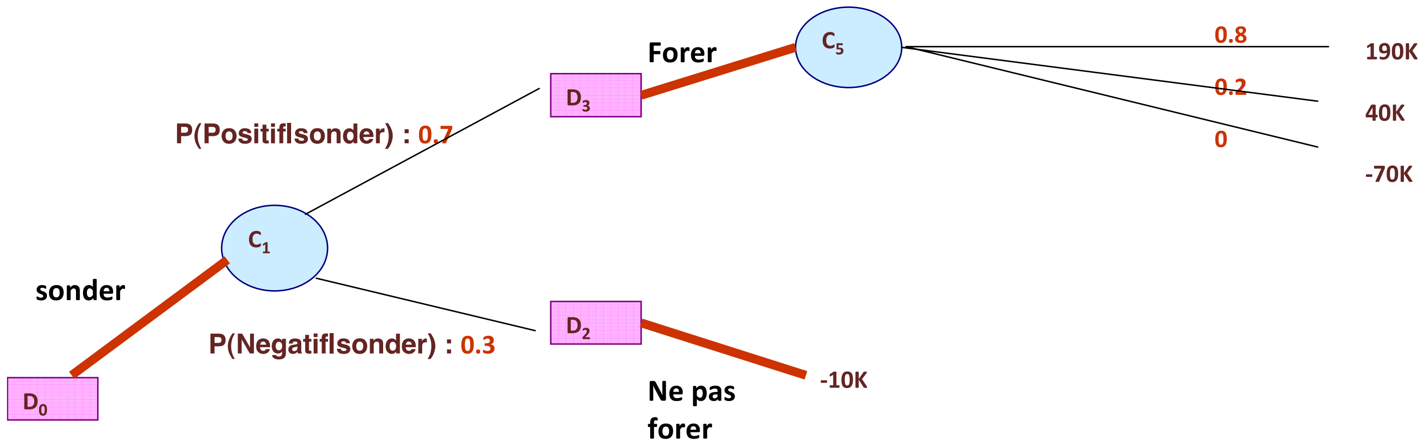


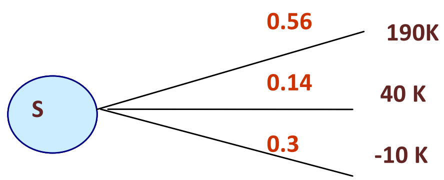
Strategies	U
$S_1=(D_0, S);(D_2, F);(D_3, NF)$	{190, 40, -70, -10}

Arbre de Décision Probabiliste



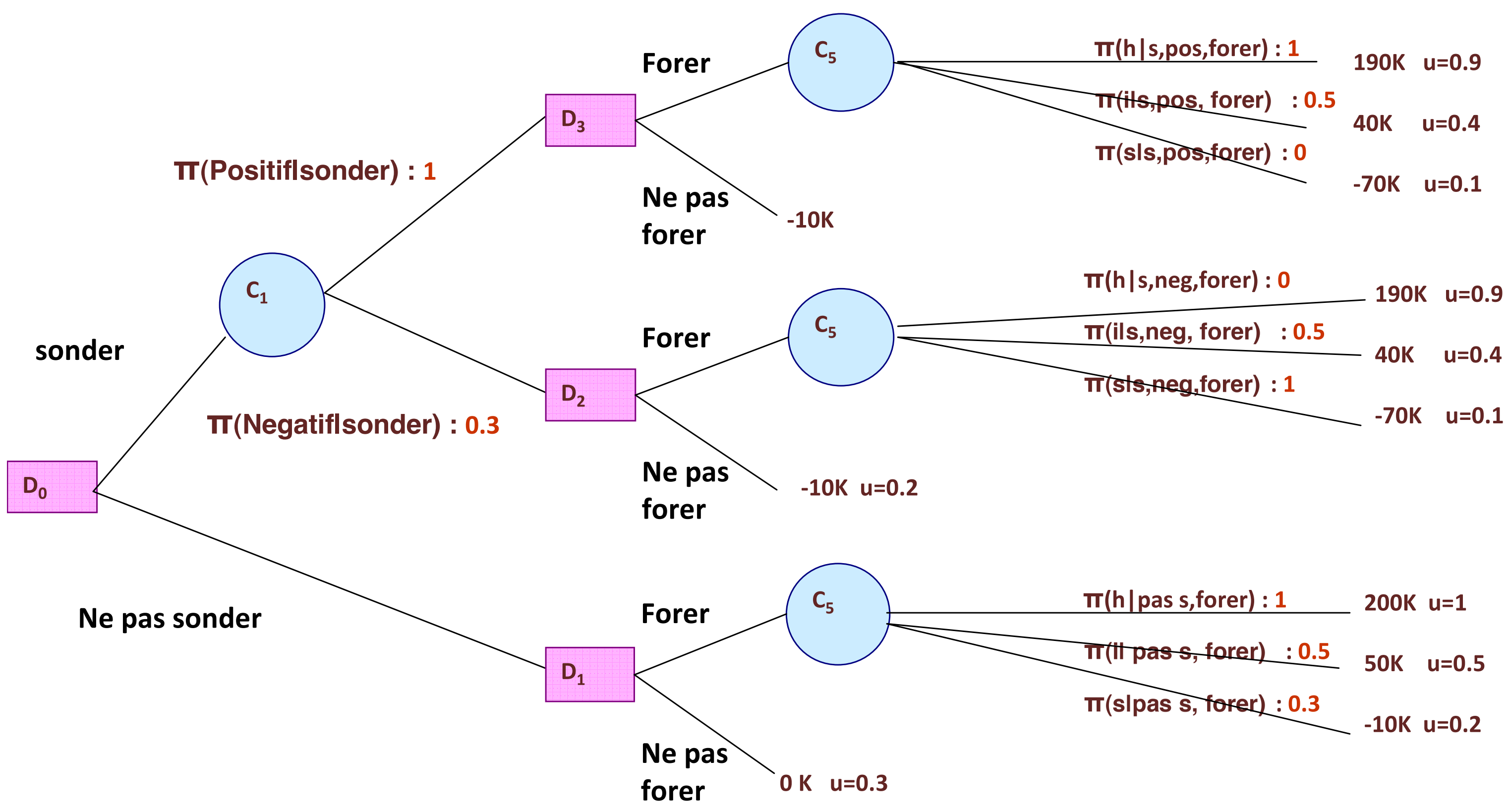
Utilité esperée d'une strategie



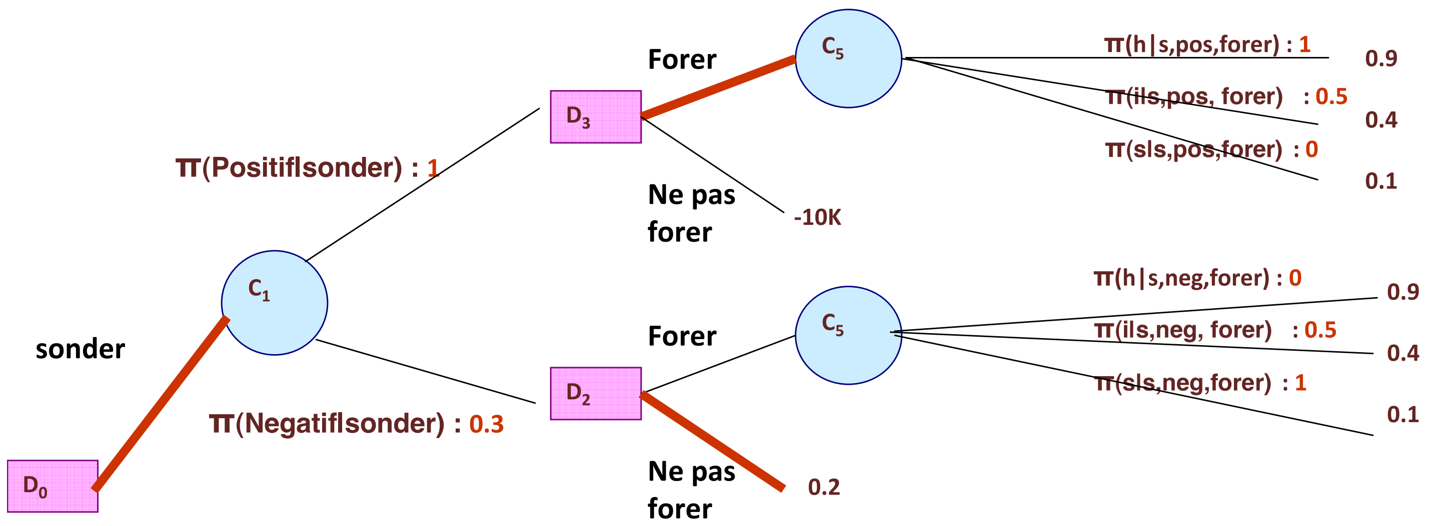


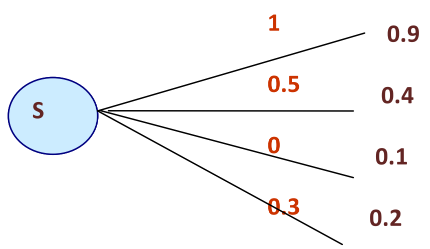
Utilité Espérée $\quad\quad$ **$UE(S) = \Sigma_s\ u(s) \cdot p(s) = 13{,}2$**

Arbre de Décision Possibiliste



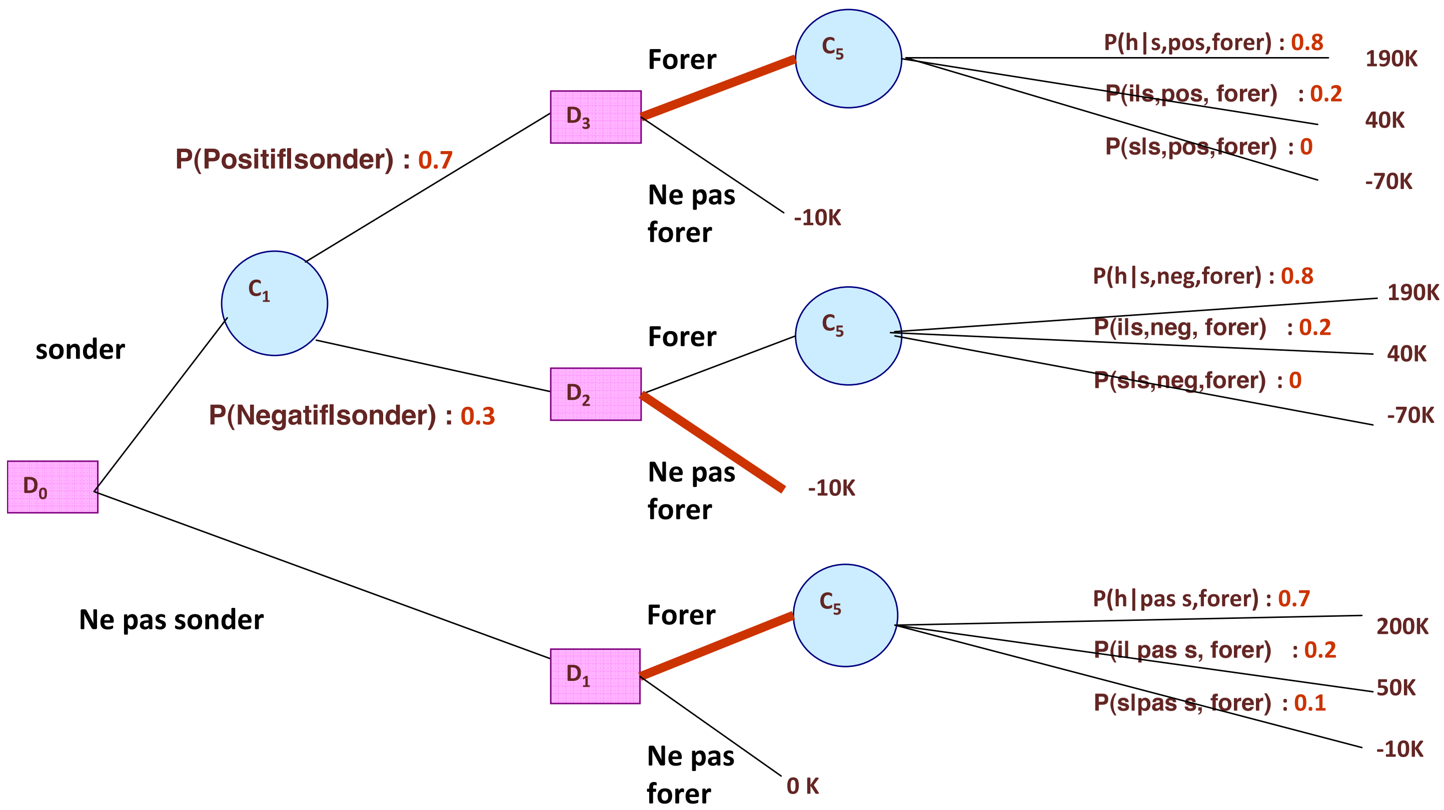
Utilité pessimiste d'une strategie



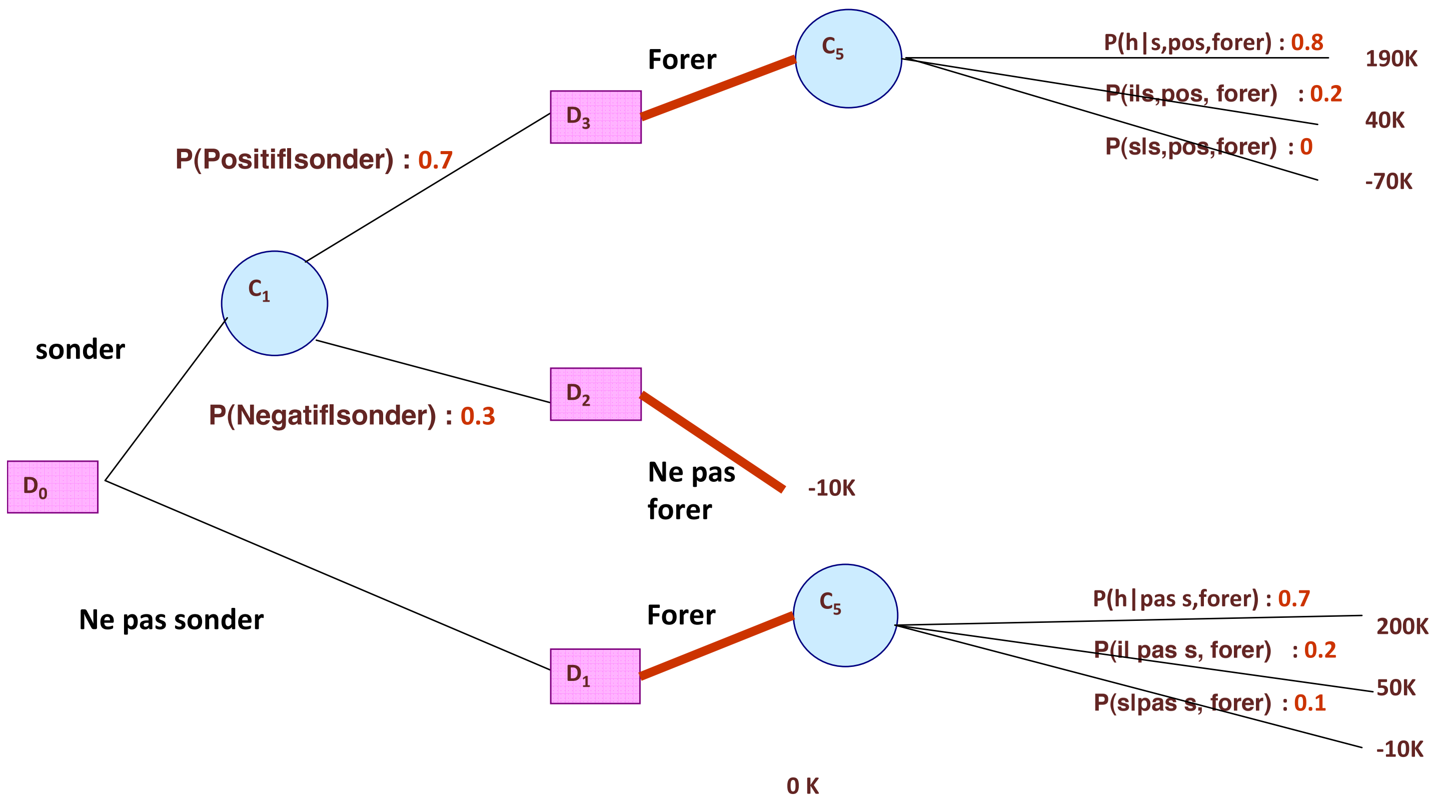


Utilité Pes $U^*(S) = \min_s \max(u(s), 1 - \pi(s)) = 0.5$

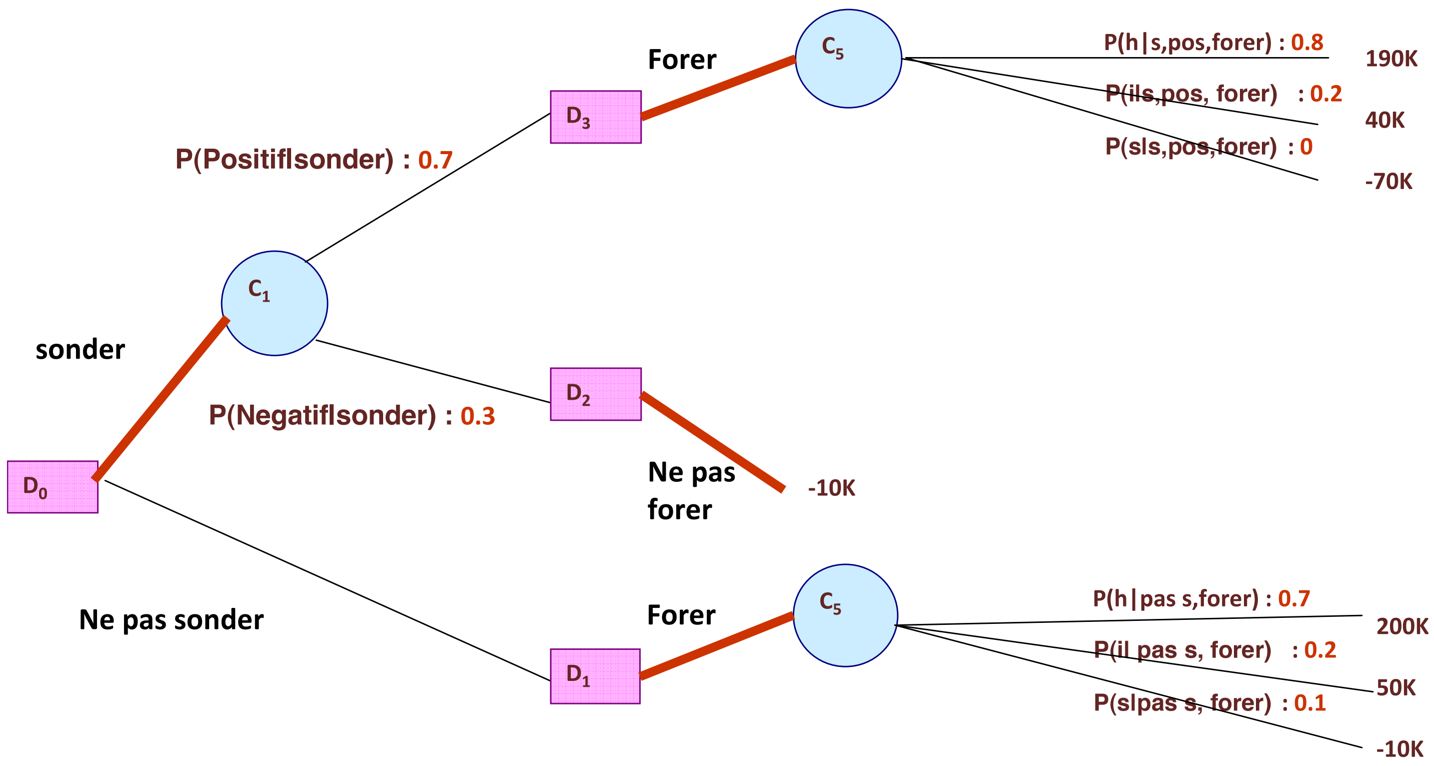
Programmation dynamique



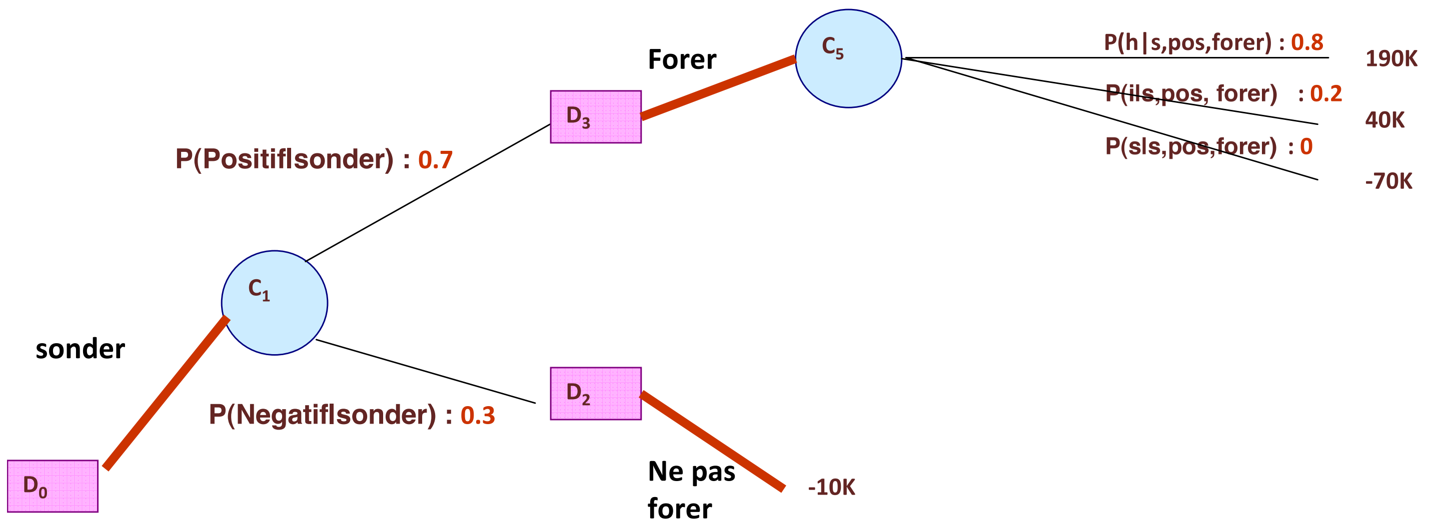
Programmation dynamique



Programmation dynamique



Programmation dynamique



Quelle règle de décision utiliser ???

- Utilité compensatoire / decision repétée ? (EU, Choquet)
- Propriétés prescriptives : transitivité, complétude, principe de la chose sure, Pareto
- Aspects calculatoires :
  - Approches ordinales (Sugeno et lexi-Sugeno) moins cher que Choquet et mieux adapté à une information "pauvre"
  - optimisation sur les domaines combinatoires
    * mesure decomposable (UE, U^*, U_*) ou non
    * principe de la chose sure
  - décision séquentielle: Programmation dynamique, MDP, si le principe de Bellman est respecté (UE, Uj, U_*). Si pas: $NP - hard$
  - décision séquentielle: Simulation

Une reference pour demarer

Concepts et méthodes pour l'aide à la décision 2: Risque et incertain
Traité IC2, série Informatique et systèmes d'information
Auteur(s) : BOUYSSOU Denis, DUBOIS Didier, PIRLOT Marc, PRADE Henri
Eds., Lavoisier, 2006.